第5讲 二项方程

**课前思考**

方程都是一元高次方程，这些方程有什么共同的特点？

这四个方程的左边只有两项，其中一项含未知数*x*，这项的次数就是方程的次数；另一项是常数项；方程的右边是0.

**知识梳理**

1. **二项方程**

**(1)概念：**如果一元*n*次方程的一边只有含未知数的一项和非零的常数项，另一边是零，那么这样的方程就叫做**二项方程**.

**(2)一般形式：**关于*x*的一元*n*次二项方程的一般形式为*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*.

**注意：**① *axn* =0(*a*≠0)是非常特殊的*n*次方程，它的根是0.

②这里所涉及的二项方程的次数不超过6次.

如果一元*n*次方程的一边只有含未知数的一项和非零的常数项，另一边是零，那么这样的方程就叫做二项方程.

关于*x*的一元*n*次二项方程的一般形式为*axn*+*b*=0(*a*≠0，*b*≠0，*n*是正整数).

←*axn*=0(*a*≠0)是非常特殊的*n*次方程，它的根是0.

1. **二项方程的根**

**(1)根的情况：**对于二项方程*axn*+*b*=0(*a*≠0，*b*≠0)可变形为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，

当*n*为奇数时，方程\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_实数根.

当*n*为偶数时，如果*ab*\_\_\_\_\_\_\_\_\_0，那么方程有两个实数根，且这两个根互为相反数；

如果*ab*\_\_\_\_\_\_\_\_\_0，那么方程没有实数根.

**(2)**二项方程的基本方法是**开方**.

对于二项方程*axn*+*b*=0(*a*≠0，*b*≠0)可变形为，

当*n*为奇数时，方程有且只有一个实数根.

当*n*为偶数时，如果*ab*<0，那么方程有两个实数根，且这两个根互为相反数；

如果*ab*>0，那么方程没有实数根.

**典型解析**

**例1：**下列关于*x*的方程是二项方程的是( ).

(A)2*x*2=0 (B) (C)*x*3+*x*=0 (D)*x*+=0

答案：B

**【变式训练】**

判断下列方程是不是二项方程：

(1) (2)*x*4+*x*=0； (3)*x*5=9； (4)*x*3+*x*=1.

**例2：**(1)设关于*x*的方程3*x*4+*mx*+2=0是二项方程，则*m*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：0

(2)设关于*x*的方程*ax*4+1-*b*=0是二项方程，则*a*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，*b*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：≠0；≠1

**【变式训练】**

当*a*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_时，(*a*+1)*x*2+(*a*2-1)*x*=1是二项方程.

答案：=1

**例3：**解下列方程：

(1)； (2)； (3)

(4)3*x*5-68=0； (5) 5*x*3+118=0.

解：(3)方程两边同时开立方，得

利用计算器，得*x*=2.5.

所以，原方程的根是*x*=2.5.

(4)原方程可变形为

得

利用计算器，得

所以，原方程的根是*x*≈1.867.

**例4：**解下列方程：

(1)*x*6-64=0； (2)2*x*4-18=0； (3)*x*6+1=0.

解：(1)原方程可变形为*x*6=64.

得

利用计算器，得

所以，原方程的根是*x*=±2.

(2)原方程可变形为*x*4=9，

得

利用计算器，得

所以，原方程的根是*x*1≈1.732，*x*2≈-1.732.

(3)原方程可变形为*x*6=-1.

因为在实数范围内负数的偶次方根不存在，所以原方程没有实数根.

**例5：**解下列方程：

(1)(*x*+1)3-4=0； (2)2(1-3*x*)4-10=0；

分析：分别将*x*+1、1-3*x*和看作一个“整体”，那么原方程就可看作以这个“整体”为新“元”的方程.

解：(1)原方程可变形为(*x*+1)3=4，

得

解这个一元一次方程，得

利用计算器，得

所以，原方程的根是*x*≈0.587.

(2)原方程可变形为(1-3*x*)4=5，

得

即

分别解这两个一元一次方程，得

利用计算器，得

所以，原方程的根是*x*1≈-0.165，*x*2≈0.832.

(3)原方程可变形为

得

解这个一元一次方程，得

利用计算器，得

所以，原方程的根是*x*≈-0.759.

**例6：**【对方程根的判断】

(1)下列关于*x*的方程是二项方程，且只有一个解的是( ).

(A)*x*5=9 (B)2*x*4-32=0 (C)2*x*2+1=0 (D)*x*6=1

答案：A

(2)若关于*x*的二项方程2*x*4+*m*=0没有实数根，则*m*的取值范围是( ).

(A)*m*≤0 (B)*m*<0 (C)*m*≥0 (D)*m*>0

答案：D

(3)以下不可能是二项方程的解的是( ).

(A)*π* (B) (C)0 (D)

答案：C

(4)下列说法错误的个数是( ).

①二项方程一定有解； ②二项方程的解最多有2个；

③二项方程如果有两解，则是一对相反数.

(A)0 (B)1 (C)2 (D)3

答案：B

**【变式训练】**

若关于*x*的二项方程只有一个解，则它一定是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_次方程；

若无解则它一定是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_次方程；

若它有两个解，则它一定是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_次方程.(填“奇”或“偶”)

答案：奇；偶；偶；

**例7：**(1)关于*x*的方程*ax*4+*b*=0(*a*≠0，*b*≠0)有一个根为2，则它的解为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

(2)关于*x*的方程*ax*3+*b*=0(*a*≠0，*b*≠0)有一个根为2，则它的解为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：(1)*x*=±2；(2)*x*=2

**例8：**(1)关于*x*的方程*x*2*n*+1=1(*n*为正整数)的解为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

(2)*x*2*n*=1(*n*为正整数)的解为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：(1)*x*=1；(2)*x*=±1

**同步训练**

**一、填空题**

1.下列关于*x*的方程中，是二项方程的是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(填写序号).

①*x*3-14=0；②*x*4+*x*2=0；③*x*3=27；④*x*3=0；⑤*x*2+=1；⑥*x*3+1.

答案：①③

2.如果关于*x*的方程3*x*4+*mx*-7=0是二项方程，那么*m*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：0

3.设关于*x*的方程(*a*-1)*x*3+2-*b*=0是二项方程，则*a*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，*b*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：≠1；≠2

4.当*a*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_时，(*a*-2)*x*2+(*a*2-4)*x*=1是二项方程.

答案：=-2

5.(1)若关于*x*的二项方程的次数是奇数，则它有\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_个解；

(2)若次数是偶数，则它有\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_个解或\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：(1)1；(2)2；无解

6.(1)关于*x*的方程*ax*4+*b*=0(*a*≠0，*b*≠0)有一个根为1，则它的解为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

(2)关于*x*的方程*ax*5+*b*=0(*a*≠0，*b*≠0)有一个根为1，则它的解为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：(1)*x*=±1；(2)*x*=1

7.若*n*为正整数，关于*x*的方程2*x*2*n*+1=2的解为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

2*x*2*n*=2的解为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：*x*=1；*x*=±1

8.如果关于*x*的二项方程3*x*6+*m*=0没有实数根，那么*m*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：*m*＞0

**二、选择题**

9.下列方程中，属于二项方程的是( )

A.2*x*3+9=0 B.*x*3+5*x*=0 C.*x*4+2*x*2=1 D.+4=0

\11.2x#4 -128 = 0

答案：A

10.如果关于*x*的方程*axn*+*b*=0(*a*≠0，*b*≠0，*n*是偶数)有两个实数根.则下列结论成立的是( )

A. *ab*>0，两根互为相反数 B. *ab*<0，两根互为相反数

C. *ab*>0，两根相等 D. *ab*<0，两根相等

答案：B

**三、解答题**

11.解关于*x*的方程：

(1)*x*3-27=0； (2)2*x*4-128=0； (3)*x*6+2=0.

12.解关于*x*的方程：

(1)2(*x*-)2-24=0； (2)(*x*-1)5=32； (3)(3*x*-2)4=.

**【探索创新】**

解关于*x*的方程：(*a*≠0，*b*≠0)

(1)*ax*2-*b*=0； (2)*ax*3-*b*=0；

(3)*ax*2*n*-*b*=0(*n*为正整数)； (4)*ax*2*n*+1-*b*=0(*n*为正整数).

答案：(1)*ab*>0时*ab*<0时，无解(3)*ab*>0时；*ab*<0时，无解